Einführung in die Mathematik | **Köln**
Probeklausur | **Januar 2012**

Aufgabe 1

$(5 + 3 = 8 \text{ Punkte})$

(i) Seien A, B, C beliebige Mengen. Beweisen Sie:

$$(A \cup B) \cap (A \cup C) = A \iff B \cap C \subseteq A.$$

(ii) Berechnen Sie die Summe:

$$\sum_{n=0}^{l} \binom{l}{n} (-1)^n \cdot 2 \cdot 3^{n-1}$$

Aufgabe 2

$(3 + 6 = 9 \text{ Punkte})$

(i) Bestimmen Sie den Rest der Division von 5^{165} durch 3^5.

(ii) Beweisen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$23 \mid 2 \cdot 3^{3n+1} + 17 \cdot 2^{2n}$$

Aufgabe 3

$(3 + 7 = 10 \text{ Punkte})$

(i) Für welche ganzen Zahlen x ist $5x - 8$ durch 6 teilbar?

(ii) Ein Computerhändler verkauft Desktop-Computer für 720 das Stück und Notebooks für 1 160 . Heute beträgt sein Umsatz 11 560 . Wie viele Desktop-Computer und wie viele Notebooks hat er verkauft?

Aufgabe 4 (5 + 5 = 10 Punkte)

Es seien die zwei Funktionen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{für} \quad x \leq 0 \\ \frac{1}{x} & \text{für} \quad x > 0 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} x^3 & \text{für} \quad x \leq 0 \\ x^2 + x - 1 & \text{für} \quad x > 0 \end{cases}.$$

(i) Bestimmen Sie $f \circ g$.

(ii) Untersuchen Sie $f \circ g$ auf Injektivität und auf Surjektivität.

Aufgabe 5 ((0,5+1,5+0,5+0,5)+3+(4+1+2+2)=15 Punkte)

(i) Definieren Sie die folgenden Begriffe:

a) $A \times B :=$ (für zwei Mengen A, B)

b) Gegeben sei ein Körper K. Wann heißt K *total angeordnet*?

c) $a \equiv b \mod m \iff$

d) $\varphi(n)$ (Euler-Indikator):

(ii) Welchen Wahrheitswert haben die folgenden Aussagen für beliebige $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ und $n, k \in \mathbb{N}$? Kreuzen Sie an:

Aussage	Wahr	Falsch
$a < b \Rightarrow c \cdot a < c \cdot b$		
$\lvert a - b\rvert \leq \lvert a\rvert - \lvert b\rvert$		
$d \mid a \Rightarrow 1 \leq \lvert d\rvert \leq \lvert a\rvert$		
$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$		
Die Teilbarkeitsrelation „$\mid$“ ist eine Äquivalenzrelation.		
$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ist überabzählbar.		

(iii) a) Beweisen Sie den folgenden Satz der Vorlesung:

Satz

i. Es sei $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$. Dann gibt es eine Primzahl p mit $n < p < n!$.
ii. Zu jeder natürlichen Zahl n gibt es n aufeinanderfolgende natürliche Zahlen, die keine Primzahlen sind.

b) Was besagt das Wohlordnungsprinzip?

c) Was besagt der Satz über die Division mit Rest?

d) Was besagt der Hauptsatz über den ggT?

Rechenaufgabe $(0,5 + 0,5 + 0,5 + 0,5 = 2$ Punkte)

Achtung: Die Rechenaufgabe kann auch zu negativen Punkten führen (falls Teilaufgaben nicht oder falsch bearbeitetet wurden).

(i) Berechnen Sie:

$$5^3 - 5^6 + 5^9 - 5^{12} + \ldots - 5^{6n} =$$

(ii) Welchen Wahrheitswert haben die folgenden Aussagen? Kreuzen Sie an:

Aussage	Wahr	Falsch
$\sqrt[3]{(3^3)^3} = (3^3)^2$		
$\sqrt{x^2} = -x, \forall x < 0$		
$162^n + 68^n = 230^n \ (\forall\, n \in \mathbb{N})$		

(iii) Vereinfachen Sie (für $x \neq -1$): $\dfrac{x^2y^2 + x^2 - y^2 - 1}{x+1} =$

(iv) Zerlegen Sie in Faktoren (d. h. schreiben Sie es als Produkt von Polynomen vom Grad ≥ 1): $a^3 - b^3 + a^2 + ab + b^2 =$